Grado en Ingeniería Civil

Examen de Matemáticas I - Convocatoria de febrero 2015

Propuesta de ejercicios 2

Ejercicio Estudia la monotonía de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

y deduce que:

a) Para todo $x > 0$ se verifica que $x^{1/x} \leqslant e^{1/e}$. ¿Para qué valor de x se da la igualdad?

b) Para $0 < a < b \leqslant e$ se verifica que $a^{1/a} < b^{1/b}$ y para $e \leqslant a < b$ se verifica que $a^{1/a} > b^{1/b}$.

Ejercicio a) Prueba, usando el teorema de Bolzano, que la ecuación

$$\ln x + 15x - 8x^2 + x^3 = 0$$

tiene al menos tres soluciones reales e indica tres intervalos disjuntos que las contienen.

b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha ecuación no puede tener más de tres soluciones reales.

Ejercicio

a) Prueba, usando el teorema de Bolzano que la ecuación

$$e^x - 3x^2 = 0$$

tiene al menos tres soluciones reales.

b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha ecuación no puede tener más de tres soluciones reales.

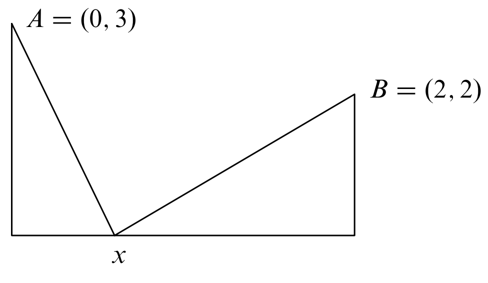
Ejercicio

a) (1 punto) Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [-1, 1]$. Prueba que hay algún $c \in [-1, 1]$ para el que se verifica la igualdad $f(c) = \frac{1}{4}(c^3 + 3c)$.

b) (1 punto) Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica que $\operatorname{sen} x \geqslant \frac{2}{\pi} x$.

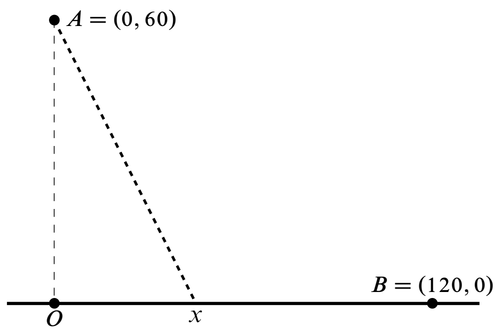
Ejercicio

Dados los puntos $A = (0, 3)$ y $B = (2, 2)$, calcula el camino más corto para ir de A a B pasando por un punto $(x, 0)$ del eje de abscisas. Debes de justificar que el mínimo calculado es un mínimo absoluto.



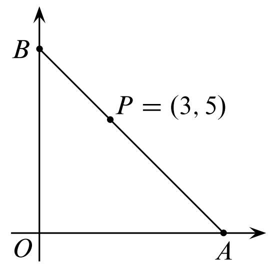
Ejercicio

Estás en el desierto con tu vehículo en medio de la arena situado en un lugar cuyas coordenadas (en kilómetros) son $A = (0, 60)$ y tienes que ir a una ciudad cuyas coordenadas son $B = (120, 0)$. Por el origen $O = (0, 0)$ y por la ciudad B pasa una carretera recta asfaltada que los une. En carretera tu velocidad es de 120 kilómetros por hora y sobre la arena es de 80 kilómetros por hora. ¿Qué camino debes seguir para llegar lo antes posible a B?



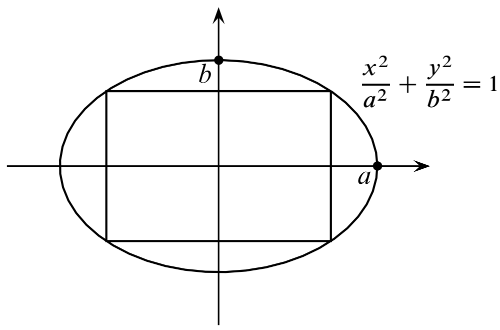
Ejercicio

Determina la recta que pasa por el punto $(3, 5)$ que forma con los ejes coordenados un triángulo OAB de área mínima. Justifica que el resultado obtenido es un mínimo absoluto.



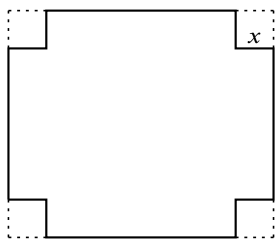
Ejercicio

Calcula las dimensiones y el área del rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados de mayor área que puede inscribirse en una elipse de semiejes $a > 0$ y $b > 0$.



Ejercicio

Se quiere construir una caja sin tapa con una lámina metálica rectangular cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Halla las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados de la lámina rectangular miden 12 cm. y 18 cm.



Ejercicio Se desea construir un silo, con un volumen de 12 metros cúbicos, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Calcula las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

Ejercicio Dado $t > 0$, sea $V(t)$ el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)(x^2+2x+2)}} \qquad (0 \leqslant x \leqslant t)$$

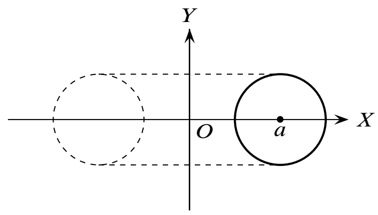
Calcula $V(t)$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$.

Ejercicio

El círculo limitado por la circunferencia de ecuación

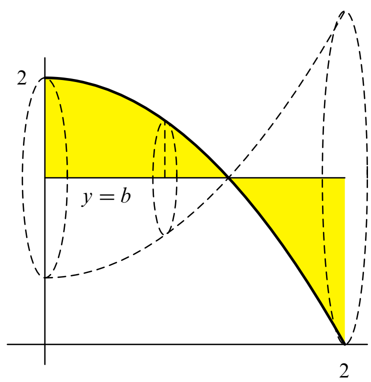
$$(x-a)^2 + y^2 = 1$$

donde $a > 1$, gira alrededor del eje OY. Calcula el volumen del sólido de revolución obtenido:
a) Por el método de los discos o arandelas.
b) Por el métodos de las capas o tubos.



Ejercicio Una corona circular de radio interior $\sqrt{2}$ y radio exterior $\sqrt{6}$ se corta con la parábola de ecuación $y^2 = x$. Calcula el área de cada una de las dos regiones resultantes.

Ejercicio La parte de la parábola $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$ donde $0 \leqslant x \leqslant 2$ gira alrededor de la recta $y = b$, donde $0 \leqslant b \leqslant 2$. Calcular el volumen del sólido resultante (que será una función de b). Calcula el valor de b que hace mínimo el volumen de dicho solido.



Ejercicio (2 puntos) Sea el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 1$$

a) Calcula y clasifica los puntos críticos de f.

b) Calcula los extremos absolutos de f en el círculo $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Ejercicio

a) Calcula para $t > 0$ la integral:

$$V(t) = \int_0^t \frac{3+2x}{x^3+2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Calcula el límite $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$.

Ejercicio Calcula la integral doble:

$$\iint_A (x^2+y^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Donde:

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+y^2 \leqslant 1,\ x+y \geqslant 2\right\}$$

Ejercicio Calcula la integral doble:

$$\iint_A \frac{1}{(4-x^2-y^2)(1+x^2+y^2)}\,\mathrm{d}(x,y)$$

Donde:

$$A = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1,\ |y| \leqslant x\right\}$$

Ejercicio

a) Clasifica los extremos relativos del campo escalar $f(x,y) = x^3+y^3-xy^2-x+16$.

b) Calcula el máximo y el mínimo absolutos de dicho campo escalar en el conjunto:

$$K = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 2,\ y \geqslant 0\right\}$$

Ejercicio Sea $f(x,y) = y^3+2x^2+y^2-4x-8$.

a) Clasifica los puntos críticos de f.

b) Calcula los puntos donde se alcanzan los valores máximo y mínimo absolutos de f en la elipse

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x^2+y^2 \leqslant 3\right\}$$

Ejercicio Sea Γ la curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano $x+y+z=1$. Calcula los puntos de Γ que están más cerca y más lejos del punto $(1,2,3)$. Justifica que los resultados obtenidos son valores máximos y mínimos absolutos.

Ejercicio Calcula la integral doble:

$$\iint_A (x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$$

donde el recinto de integración es el conjunto:

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2+y^2 \leqslant 1\right\}.$$

Ejercicio Calcula la integral doble:

$$\iint_A \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \, \mathrm{d}(x, y)$$

donde el recinto de integración es el conjunto:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

Ejercicio Calcula la integral doble:

$$\iint_A \frac{x^2 \, \mathrm{e}^{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, \mathrm{d}(x, y)$$

donde el recinto de integración es el conjunto:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}.$$

Ejercicio Calcula la integral:

$$\iint_A \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{e}^{x^2+y^2}}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \, \mathrm{d}(x, y).$$

Donde:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y, \ 0 \leqslant x, \ x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

Ejercicio Calcula la integral

$$\iint_A \frac{1}{(4 - x^2 - y^2)(1 + x^2 + y^2)} \, \mathrm{d}(x, y)$$

Donde

$$A = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1, \ |y| \leqslant x\right\}$$